КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ БОРИСА ГРІНЧЕНКА

Факультет інформаційних технологій та управління

Кафедра інформаційних технологій та математичних дисциплін

«ПОГОДЖЕНО»
Проректор з науково-методичної та навчальної роботи
_________ О.Б. Жильцов
« __ » _____ 2017 р.

«ЗАТВЕРДЖЕНО»
Вчена рада факультету інформаційних технологій та управління.
Протокол № 7 від 19.04.2017 р.
Вчений секретар _______ О.В. Акіліна

ПРОГРАМА
КОМПЛЕКСНОГО ЕКЗАМЕНУ З МАТЕМАТИКИ

Освітньо-кваліфікаційний рівень	«бакалавр»
Галузь знань	0402 Фізико-математичні науки
Напрям підготовки	6.040201 Математика*

Розглянуто і затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій та математичних дисциплін, Протокол № 8 від 1 лютого 2017 р.

Завідувач кафедри
_____________ О. С. Литвин

Київ 2017

1. Пояснювальна записка

Метою комплексного екзамену з математики є перевірка рівня сформованості загальної математичної культури випускників та фактичних знань, умінь і навичок з фундаментальних розділів математики, передбачених галузевим стандартом, які необхідні при викладанні математики в середніх навчальних закладах освіти та є базовими для успішного продовження навчання в магістратурі.

Програма комплексного екзамену з математики (далі – Програма) є нормативним документом Київського університету імені Бориса Грінченка, який розроблено кафедрами інформаційних технологій і математичних дисциплін у відповідності з галузевим стандартом (ОКХ, ОПП, навчальним планом) підготовки бакалаврів за напрямом 6.040201 «Математика*».

Програма державного екзамену з математики містить основні питання з курсів лінійної алгебри, вищої алгебри та теорії чисел; аналітичної, конструктивної, диференціальної та вищої геометрії; математичного та комплексного аналізу; диференціальних рівнянь. У програмі вони об'єднані в чотири розділи: «Алгебра», «Геометрія», «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння». На екзамені студент повинен продемонструвати вміння формулювати означення і теореми, наводити при необхідності ілюстрації, застосовувати теоретичні факти до розв'язування конкретних задач.

Відповідаючи на теоретичне питання екзаменаційного білету, студент повинен продемонструвати свідоме володіння математичними поняттями, про які йде мова в даному питанні, та показати загальне розуміння відповідної математичної теорії. Від студента не вимагається проведення детальних математичних викладок з доведенням усіх тверджень, які стосуються питання білету. Він повинен викласти основні положення теорії, яка стосується даного питання (аксіоми, теореми, формули, методи, алгоритми тощо) в строгій логічній послідовності та обґрунтувати основні з них.

Орієнтовний обсяг інформації з кожного питання даної програми, якою повинен володіти студент, визначається методичними вказівками, які розробляє і затверджує кафедра інформаційних технологій і математичних дисциплін.

За рішенням екзаменаційної комісії на екзамені під час підготовки до відповіді студентам можна дозволити користуватись підручниками та навчальними посібниками, вказаними в програмі.

2. Методика проведення і оцінювання комплексного екзамену з математики

Комплексний екзамен з математики проводиться **в письмовій формі** за білетами, затвердженими кафедрою інформаційних технологій і математичних дисциплін. Час виконання завдання – чотири академічні години.

Кожен білет містить чотири завдання:

– завдання 1 та 2 перевіряє знання основних фактів теорій розділів «Алгебра», «Геометрія», «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння» Програми (в довільній комбінації з двох розділів), здатність їх оперативно відтворювати, відчувати взаємозв'язок і органічну єдність понять, фактів та теорій;

– завдання 3 та 4 перевіряє здатність застосувати теоретичні знання до розв'язування задач, володіння стандартними методами, прийомами алгоритмами. До уваги беруться вміння добре оформляти розв'язання задачі, аргументувати логічні кроки і використовувати відповідну символіку.

Критерії оцінювання навчальних досягнень студентів

Завдання 1, 2:

21–25 балів – повне і правильне формулювання всіх теоретичних фактів – означень, теорем, наслідків з них тощо, повне і правильне обґрунтування основних фактів, ілюстрація теоретичного матеріалу вдало підібраними прикладами;

16–20 балів – повне і правильне формулювання всіх теоретичних фактів – означень, теорем, наслідків з них тощо, повне і правильне обґрунтування основних фактів, відсутність прикладів для ілюстрації;

11–15 балів – повне і правильне формулювання всіх теоретичних фактів – означень, теорем, наслідків з них тощо;

6–10 балів – правильне, але, можливо, неповне формулювання всіх основних теоретичних фактів – означень, теорем, наслідків з них тощо;

1–5 балів – формулювання основних теоретичних фактів, із можливими незначними помилками або недоліками;

0 балів – відповідь неправильна або відсутня.

Завдання 3, 4:

21–25 балів – повне і правильне розв'язання з належним обґрунтуванням всіх логічних кроків;

16–20 балів – повне і правильне розв'язання, наявність незначних логічних прогалин в обґрунтуваннях або незначних технічних помилок;

11–15 балів – в цілому правильна ідея, хід розв'язання, наявність незначних логічних помилок або неповнота розв'язання, технічні помилки;

6–10 балів – частково правильне розв'язання (містить деякі правильно виконані кроки), наявні помилки або відступі деякі кроки розв'язання;

1–5 балів – наявність суттєвих помилок в розв'язанні (відсутні або неправильні деякі кроки);

0 балів – неправильне або відсутнє розв'язання.

Шкала оцінювання навчальних досягнень студентів

Кількість балів (max – 100)	**Оцінка за національною шкалою**	**Оцінка за Шкалою ЄКТС**
90 – 100	**«Відмінно»**	A
82 – 89	**«Дуже добре»**	B
75 – 81	**«Добре»**	C
69 – 74	**«Задовільно»**	D
60 – 68		E
1 – 59	**«Незадовільно»**	FX

3. Змістова частина програми

Алгебра

Екзаменовані повинні володіти теоретико-множинною і логічною символікою, основними поняттями алгебри і теорії чисел(алгебраїчна операція, група, кільце, поле, векторний простір, лінійна залежність і незалежність, лінійні оператори, матриці і визначники, прості числа, подільність, конгруентність, многочлени), мати чітке уявлення про основні числові системи і їх будову, володіти навичками розв'язування систем лінійних рівнянь, знати основні арифметичні застосування теорії конгруенцій.

1 . Натуральні числа (аксіоми Пеано). Принцип математичної індукції, різні форми індукції.

2. Групи, приклади груп, найпростіші властивості груп. Підгрупи: означення і критерій.

3. Кільце, підкільце: означення і критерій, найпростіші властивості.

4. Поле, підполе. Найпростіші властивості поля.

5. Поле комплексних чисел. Алгебраїчна та тригонометрична форми комплексного числа.

6. Системи лінійних рівнянь. Критерій сумісності і визначеності системи лінійних рівнянь. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих.

7. Арифметичний n-вимірний векторний простір. Лінійна залежність і лінійна незалежність системи векторів. Ранг і базис системи векторів.

8. Існування ненульових розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь, її побудова.

9. Обернена матриця. Розв'язування системи лінійних рівнянь матричним способом. Формули Крамера.

10. Векторні простори, підпростори. Базис і розмірність скінченновимірного векторного простору.

11. Лінійні оператори. Матриця лінійного оператора. Власні значення і власні вектори. Теорема про зв'язок характеристичних чисел і власних значень лінійного оператора. Зведення матриці до діагонального вигляду.

12. Теорема про ділення з остачею в кільці цілих чисел. НСД і НСК двох чисел і зв'язок між ними. Алгоритм Евкліда.

13. Прості числа. Нескінченість множини простих чисел. Канонічний розклад складеного числа у вигляді добутку простих чисел та єдиність такого розкладу. Канонічний запис та застосування такого запису до знаходження НСД і НСК чисел.

14. Означення і основні властивості конгруентності цілих чисел. Повна і зведена система лишків, їх властивості. Теореми Ейлера і Ферма.

15. Лінійні конгруенції з одним невідомим, теорема про число розв'язків. Способи розв'язування лінійних конгруенцій.

16. Многочлени над полем. Теорема про ділення з остачею. НСД двох многочленів. Алгоритм Евкліда.

17. Основна теорема алгебри та наслідки з неї.

18. Многочлени з дійсними коефіцієнтами. Спряженість уявних коренів таких многочленів. Незвідні над полем дійсних чисел многочлени та канонічний розклад многочленів над полем дійсних чисел.

19. Многочлени над полем раціональних чисел. Цілі і раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами. Незвідні над полем раціональних чисел многочлени.

Геометрія

Екзаменовані повинні володіти методами аналітичної геометрії, бути ознайомленими як з груповою, так і з структурною точкою зору на геометрію, з сучасним аксіоматичним методом, основними фактами геометрії Лобачевського, мати загальні уявлення про різні неевклідові геометрії, використовувати знання топології при означенні ліній і поверхонь, вміти застосовувати теоретичні знання на практиці, зокрема, до доведення теорем і розв'язування задач шкільного курсу геометрії. Це означає, що при відповіді студенти повинні продемонструвати достатньо широкий погляд на геометрію і готовність викладати елементарну геометрію незалежно від того, на якій аксіоматиці вона побудована, тобто готовність працювати в школі за будь-яким посібником.

1. Різні види систем координат на площині. Геометричний зміст координат точки. Теорія прямих на площині (в аналітичному викладі).

2. Еліпс, гіпербола, парабола, їх канонічні рівняння і властивості. Класифікація алгебраїчних кривих 2-го порядку на евклідовій площині.

3. Теорія площин у просторі. Кут між площинами. Відстань від точки до площини (в аналітичному викладі).

4. Теорія прямих у просторі. Кут між прямими (в аналітичному викладі).

5. Взаємне розміщення двох площин, прямої і площини та двох прямих у просторі (в аналітичному викладі).

6. Елементи векторної алгебри в тривимірному евклідовому просторі. Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів, їх властивості і застосування.

7. Поверхні обертання. Циліндричні та конічні поверхні (в аналітичному викладі).

8. Еліпсоїд, гіперболоїди і параболоїди (в аналітичному викладі).

9. Група рухів площини, їх аналітичний запис і класифікація. Основні підгрупи. Застосування рухів до розв'язування задач.

10. Група перетворень подібності площини і її підгрупи. Подібність фігур. Застосування перетворень подібності до розв'язування задач.

11. Основні теореми проективної геометрії: Дезарга, про гармонічні властивості чотиривершинника, Паскаля та Бріаншона, їх застосування до розв'язування задач на побудову.

12. Аксіома паралельності і площина Лобачевського. Взаємне розміщення прямих на площині Лобачевського. Властивості паралельних і розбіжних прямих. Несуперечливість системи аксіом площини Лобачевського.

13. Огляд теорії вимірювання (довжин відрізків, площ многокутників, об’ємів многогранників).

14. Гладкі криві. Природна параметризація лінії. Кривина кривої.

15. Скрут кривої. Тригранник Френе.

16. Гладкі поверхні в евклідовому просторі. Перша квадратична форма поверхні та її застосування. Поняття про внутрішню геометрію поверхні.

17. Топологічне перетворення. Ейлерова характеристика замкнених поверхонь. Теорема Ейлера для многогранників.

Математичний аналіз

Екзаменовані повинні володіти основними поняттями математичного аналізу (функція, послідовність, ряд, границя, неперервність, похідна, інтеграл); мати уявлення про метричний простір та основні елементарні функції дійсної й комплексної змінної; володіти навичками обчислення границь, похідних, інтегралів; вміти розв'язувати найпростіші типи диференціальних рівнянь; знати застосування диференціального та інтегрального числення, а також диференціальних рівнянь до розв'язування практичних задач.

1.Числові множини. Межі, точні межі числової множини. Множини натуральних (N), цілих (Z), раціональних (Q) та дійсних (R) чисел, їх властивості.

2. Поняття числової послідовності. Границя послідовності. Основні властивості границь. Границя обмеженої монотонної послідовності. Число e.

3. Поняття функції однієї змінної. Границя функції в точці. Властивості границь. Деякі важливі границі.

4. Поняття функції багатьох змінних (на прикладі функції двох змінних). Границя функції в точці. Повторні границі.

5. Неперервність у точці функцій дійсної змінної. Властивості неперервних функцій. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

6. Неперервність функцій кількох змінних та функцій комплексної змінної. Властивості функцій, неперервних на обмеженій замкненій множині.

7. Поняття похідної для функцій однієї змінної. Диференційовність функції в точці, необхідні та достатні умови диференційовності. Правила диференціювання.

8. Похідні основних елементарних функцій. Похідна функції комплексної змінної. Аналітичні функції.

9. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші.

10. Умови сталості і монотонності функцій однієї змінної. Екстремуми функцій однієї змінної. Необхідні та достатні умови існування екстремуму. Опуклість і точки перегину. Асимптоти.

11. Поняття диференційованості функції багатьох змінних. Диференціал та частинні похідні. Екстремум функцій багатьох змінних. Необхідні та достатні умови існування екстремуму.

12. Первісна та її властивості. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування.

13. Інтеграл Рімана для функції однієї змінної. Необхідні та достатні умови інтегровності функцій однієї змінної. Основні методи обчислення інтегралів. Застосування інтеграла до розв'язування геометричних задач (знаходження площ та об'ємів).

14. Інтеграли Рімана для функцій двох та трьох змінних (означення, умови існування та обчислення).

15. Поняття криволінійного інтеграла для функції дійсної змінної та комплексної змінної. Властивості та обчислення криволінійних інтегралів.

16. Показникова функція дійсної змінної та комплексної змінної (означення і властивості).

17. Логарифмічна функція дійсної та комплексної змінної (означення та властивості).

18. Тригонометричні та обернені тригонометричні функції дійсної та комплексної змінної (означення, властивості).

19. Числові ряди з дійсними та комплексними числами. Основні поняття. Геометрична прогресія та гармонічний ряд. Властивості збіжних рядів.

20. Ознаки збіжності додатних числових рядів. Абсолютно і умовно збіжні ряди та їх властивості. Знакозмінні ряди, їх збіжність. Ряд Лейбніца.

21. Степеневі ряди з дійсними та комплексними членами. Інтервал (круг) та радіус збіжності.

22. Розвинення в степеневий ряд основних елементарних функцій. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень. Формули Ейлера.

Диференціальні рівняння

Екзаменовані повинні володіти основними поняттями теорії звичайних диференціальних рівнянь, знаннями умов існування та єдиності розв'язку задачі Коші, властивостей розв'язків лінійних рівнянь та систем, уміннями розв'язувати звичайні диференціальні рівняння першого порядку, що інтегруються в квадратурах, найпростіші диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної, зокрема, рівняння Лагранжа та Клеро, лінійні диференціальні рівняння вищих порядків, здатністю вирізняти з-поміж інших природні, фізичні, економічні та ін. динамічні явища і процеси, для моделювання яких можуть бути використані диференціальні рівняння, здатністю розробляти моделі таких процесів, аналізувати і трактувати розв'язок.

1. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь:

- поняття диференціального рівняння, звичайного диференціального рівняння, його розв'язку; інтегральна крива;
- порядок диференціального рівняння;
- диференціальні рівняння та математичне моделювання. Приклади задач, які приводять до диференціальних рівнянь;
- поле напрямів; ізокліни.

2. Умови існування і єдиності розв’язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку:
- загальний та частинний розв’язки диференціального рівняння. Задача Коші. Геометричний зміст початкових умов для диференціальних рівнянь першого та другого порядків;
- теорема існування і єдиності розв’язку задачі Коші для нормального диференціального рівняння 1-го порядку;
- поняття про особливий розв’язок диференціального рівняння;

3. Диференціальні рівняння першого порядку, які інтегруються в квадратурах:
- диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них;
- однорідні та квазіоднорідні диференціальні рівняння;
- лінійні диференціальні рівняння; рівняння Бернуллі;
- диференціальні рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник.

4. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв’язані відносно похідної:
- основні поняття. Теорема про існування та єдність розв’язку задачі Коші;
- найпростіші типи диференціальних рівнянь першого порядку, не розв’язаних відносно похідної;
- рівняння Лагранжа і Клеро;
- особливі розв’язки, умови їх існування. Дискримінантна крива. Обвідна.

5. Інтегрування диференціальних рівнянь вищих порядків:
- основні поняття: загальний вигляд диференціального рівняння вищих порядків; розв’язок, загальний, частинний розв’язки; початкові умови, задача Коші;
- теорема про існування і єдиність розв’язку задачі Коші;
- інтегрування та зниження порядку деяких типів диференціальних рівнянь вищих порядків.

6. Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку:
- теорема про існування та єдиність розв’язку задачі Коші;
- лінійна залежність та незалежність системи функцій, визначник Вронського (вронскіан).
- розв’язки лінійного однорідного рівняння, їх властивості;
- фундаментальна система розв’язків, її існування;
- властивість вронскіана системи розв’язків лінійного однорідного рівняння. Теорема про загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння;
- формула Остроградського-Ліувілля;

7. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:
- характеристичне рівняння;
- вигляд частинних розв’язків лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами у випадках: а) усі корені характеристичного рівняння прості дійсні; б) серед коренів характеристичного рівняння є комплексно-спряжені; в) характеристичне рівняння має кратні корені;
- загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

8. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:
- структура загального розв’язку лінійного неоднорідного рівняння;

- метод варіації довільних сталих;
- лінійне рівняння зі спеціальною (у вигляді квазіполінома) правою частиною. Відшукання частинного розв'язку методом невизначених коефіцієнтів (нерезонансний та резонансний випадки);
- математичні моделі на основі лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Рекомендована література

Алгебра

1. Завало С.Т. та ін. Алгебра і теорія чисел: Практикум. Частина 2. - К.: Вища шк., 1986. - 264с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра.-М.: Наука, 1983.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М.: "Наука". — 1963.
4. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. Часть 1: Числа: Учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. М. Просвещение 1974г. 383 с.
5. аналізу. - К : "Либідь", 1994. - 280 с.
6. Ш.Х. Михелович. Теория чисел. М.: Высшая школа, 1967.
7. Д.К. Фадеев, И.С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. М.: "Наука", 1972, 303 с.

Геометрія

1. Ефимов Н.В. Высшая геометрия, М., Издательство «Наука», 1971 г., 576 стр.
2. Погорелов А.В., Геометрия, Изд-во "Просвещение", Москва, 1993
3. М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова . Вища математика у 3-х кн. Кн.1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.- М.: Наука, 1986.
5. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю., Геометрия: учебное пособие, - М., Наука., 1990
6. Мищенко А. С, Фоменко А. Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 304 с. — ISBN 5-9221-0442-X
7. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. - 6-е изд., стереотип. - М., Наука, 1974. - 176 с.

Математичний аналіз

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч. 1.– К.: Вища шк., 1978.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч. 2.– К.: Вища шк., 1978.
3. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика. Книга 1. – К: Либідь, 2010.
4. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Книга 2. – К: Либідь, 2010.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М: Наука, 1971.
6. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1981.

7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1969.
8. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі.– Київ «Академія».– 2002.
9. Задачник по курсу математического анализа. Ч. I, II / Под ред. Виленкина Н.Я. – М., 1971.
10. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч.:Навчальний посібник для студентів вузів / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник та ін. – К: Вища школа, 2003. – Ч. 1.
11. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч.:Навчальний посібник для студентів вузів / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник та ін. – К: Вища школа, 2003. – Ч. 2.
12. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1968.

Диференціальні рівняння

1. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. К.: Либідь, 2003.
2. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння. Приклади і задачі.— К.: Наукова думка, 2004.
3. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Книга 2. – К: Либідь, 2010.
4. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Техніка, 2003.
5. Шкіль М.І., Сотніченко М.А. Звичайні диференціальні рівняння. — К.: Вища школа,1991.
6. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч.:Навчальний посібник для студентів вузів / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник та ін. – К: Вища школа, 2003. – Ч. 2.
7. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі.– Київ «Академія».– 2002.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1985.